



TITLE:

# 非同期回路の合成定理 (情報科学の 数学的理論)

AUTHOR(S):

中村, 剛

---

CITATION:

中村, 剛. 非同期回路の合成定理 (情報科学の数学的理論). 数理解析研究所講究録 1971, 123: 179-190

ISSUE DATE:

1971-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106497>

RIGHT:

## 非同期回路の合成定理

早大 理工 中 村 剛

Semi-modular state chart の synthesis を考える  
 場合、similarity relation  $\sim$  よりも  $v$ -similarity  
 relation  $\sim_v$  が本質的であることが Hattori [10] において明  
 かにされた。ここでは [10] において得られた  $\sim_v$  の性質と  
 、M. Hattori、H. Noguchi [7] において重要な役割を果た  
 した  $x$ -extension の概念を用いて、直接に digital ex-  
 tension を構成する手順を考える。

1. Lemma. (2 of [10]).  $(V, h)$  を finite semi-  
 modular state chart とすると、次の (1), (2), (3) が成立す  
 る。

- (1)  $|V/x|$ ,  $v$ -similarity class の数, は有限である。
- (2)  $v$ -similarity class  $T$  をとり、 $Z$  を  $Z(T)$  の  
 cycle、 $Q$  をその張る nodes とすると、 $T|Q = \{M|Q\}$ ;

$M \in T$  は全順序集合である。

(3).  $M, N$  を  $Z(M) = Z(N) = \{Z(1), \dots, Z(m)\}$  なる実とし、 $Q(q)$ ,  $q = 1, \dots, m$ , を各  $Z(q)$  の張る nodes とする。 $Q(0) = J - \bigcup_{q=1}^m Q(q)$  としたとき、 $M \sim N$  なる必要十分条件は  $M|Q(q) \equiv N|Q(q) \pmod{Z(q)|Q(q)}$  が全ての  $q = 1, \dots, m$  について成立しかつ  $M|Q(0) = N|Q(0)$  となることである。

2. 定義.  $(V, R)$  を finite semi-modular state chart,  $\{T(\alpha)\}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ , を  $v$ -similarity class の族とする。二つの  $v$ -similarity class  $T(\alpha)$ ,  $T(\beta)$  をとる。もしある実  $M \in T(\alpha)$ ,  $N \in T(\beta)$  について  $M \sim N$  となるならば  $T(\alpha) \sim T(\beta)$ ,  $R(M) = R(N)$  となるならば  $R(T(\alpha)) = R(T(\beta))$  と書く。  $K$  を次に定義される non-ordered な couple とする。

$K = \{(T(\alpha), T(\beta)); R(T(\alpha)) = R(T(\beta)) \text{ かつ } T(\alpha) \sim T(\beta)\}$ . 通常  $K$  を  $(V, R)$  の knotty set, その要素を  $K$  で示す。

3. 定義.  $(V, R)$  を node  $J$  の finite state chart,  $T$  と  $S$  を  $V$  の disjoint subset とする。  $(V, R)$  の

extension  $(V^e, h^e)$  が次の (1), (2) を満たすとき  $(T, S)$ -extension という。

(1).  $h^e(M^e) = h^e(N^e)$  が  $M^e|J \sim N^e|J$  なる  $V^e$  の真  $M^e, N^e$  については、 $M^e \sim N^e$  が成り立つ。

(2).  $M^e|J \in T, N^e|J \in S$  なる  $V^e$  の真  $M^e, N^e$  については、 $h^e(M^e) \neq h^e(N^e)$  となる。

4. Lemma. (Hattori-Noguchi [1]).  $(V, h)$  を nodes  $J$  をもつ state chart、 $K$  をその knolly set とする。もし各  $K \in K$  について  $K$ -extension  $(V^K, h^K)$  が存在するならば、それらの amalgamation  $\otimes_K (V^K, h^K)$ ,  $K \in K$ , は  $(V, h)$  の digital extension である。

5. Lemma.  $(V, h)$  を finite state chart で少くとも 1 つの cycle をもつものとするとき、ある cycle の直交系  $\{X(1), \dots, X(m)\}$  が存在して任意の cycle はそれらの線型結合で書ける。実際、 $(V, h)$  には order 子のもとで最大の  $\mathcal{E}$ -class が存在するから、その cycle をとればよい。

$X(g)$  の張る nodes を  $Q(g)$ ,  $g=1, \dots, m$ , とし各  $i \in J$  について非負整数  $w(i)$  を次の様に定義し、node  $i$  の上の cyclic number と呼ぶ。

$$w(i) \begin{cases} = 0 & \text{if } i \notin \bigcup Q(g) \\ = X(g)_i & \text{if } i \in Q(g) \end{cases}.$$

1.1 and 2.1 of [6] により、 $w(i) \neq 0$  ならば  $w(i) \geq 2$  である。

6. Lemma.  $(V, h)$  を nodes  $J$  をもった finite state chart、 $\{w(i)\}$  をそれぞれの cyclic number とする。もし  $V$  の実  $M, N$  で  $M \sim N$  かつ  $M_i \neq N_i$  となるならば、 $w(i) \neq 0$  かつ  $M_i \equiv N_i \pmod{w(i)}$  である。

証明.  $M_i < N_i$  として一般性を失わない。  $M(0) = M$ 、 $N(0) = N$ 、 $M(k) = M \vee N(k-1)$ 、 $N(k) = M(k) - M + N$  と実列  $\{M(k)\}$ 、 $\{N(k)\}$  を定義すると、ある  $k' > k \geq 0$  が存在して、 $M(k') \sim M(k) \sim N(k)$ 、 $M(k') \geq M(k) \vee N(k)$  となる。

2.6 of [6] により  $\{a(g)\}$ 、 $\{b(g)\}$ 、なる  $W$  の実列が存在して、 $Z(M(k))$  の cycle  $\{Z(g)\}$  について

$$M(k') = M(k) + \sum_g a(g) Z(g) = N(k) + \sum_g b(g) Z(g)$$

となる。 3.5 of [6] により  $\{Z(g)\}$  は直交系であるから、ある  $g$  が存在して  $M(k')_i = M(k)_i + a(g) Z(g)_i = N(k)_i + b(g) Z(g)_i$  かつ  $a(g) > b(g)$  となる。 よって

$$N_i - M_i = N(k)_i - M(k)_i = (a(g) - b(g)) Z(g)_i \text{ となる。}$$

従って  $w(i)$  の定義より  $N_i \equiv M_i \pmod{w(i)}$  をうる。

7. 定義、 $(V, R)$  を nodes  $J$  をもった finite state chart で特にある node  $i$  について  $V|\{i\} = \{0, 1, \dots, R\}$  とする。  $r, \xi$  をそれぞれ  $0 < r < R$ ,  $\xi \in J$  なる数とし、nodes  $\{i, \xi\}$  をもった  $(V, R)|\{i\}$  の extension  $(V', R')$  を次の様に定義する。

$V' = \{(j, 0) ; 0 \leq j \leq r\} \cup \{(j, 1) ; r \leq j \leq R\}$ ,  
 $R'(M')_{\xi} = M'_{\xi}$ ,  $R'(M')_i = R_i(M'_i)$   $\because M' \in V'$  で  
 $R_i$  については 1.1 of [6] を参照されたい。  $(V, R)|\{i\} = (V', R')|\{i\}$  であるから amalgamation  $(V, R) \otimes (V', R')$  をつくれる。これを "nodes  $\{\xi, J\}$  をもった  $(i, r)$  に関する type-1 extension" という。

8. 定義、 $(V, R)$  を nodes  $J$  をもった finite state chart で特にある node  $i$  について  $\omega(i) \neq 0$  とする。  $a, b$  をそれぞれ  $0 \leq a < \omega(i)$ ,  $b > 0$  なる数とし、数列  $\{a(k)\}$  を  $a(k) = a + k \cdot \omega(i)$  と定義する。  $\xi$  を  $\xi \in J$  なる指数とし、三通りの extension  $(V', R')$  を次の様に定義する。  
 どれも  $(V, R)|\{i\}$  の extension でその nodes は  $\{i, \xi\}$  である。

[type-2]:  $V' = V'(0) \cup V'(1) \cup \dots \cup V'(3b+1) \cup V'(\infty)$ ,

$$V'(0) = \{(j, 0) ; 0 \leq j < a\}$$

$$V'(3b-2) = \{(a(k-1), 2b-2), (a(k-1), 2b-1)\}$$

$$V'(3k-1) = \{(a(k-1)+1, 2k-1), (a(k-1)+1, 2k)\}$$

$$V'(3k) = \{(j, 2k); a(k-1)+1 < j < a(k)\}$$

$$k = 1, 2, \dots, b$$

$$V'(3b+1) = \{(a(b), 2b), (a(b), 2b+1)\}$$

$$V'(\infty) = \{(j, 2b+1); j > a(b)\} \quad \text{と } \exists \text{ 3.} \quad \text{但し}$$

もし  $a=0$  又は  $w(i)=2$  の時はそれぞれ  $V'(0) \times 1$ ,  $V'(3k)$  は空集合と  $\exists$  3.  $M' \in V'$  の実として  $R'(M')_i = R_i(M'_i)$ ,

$$R'(M')_s = M'_s \quad \text{と } \exists \text{ 3.}$$

$$[\text{type-3}]: \quad V' = V'(0) \cup V'(1) \cup \dots \cup V'(k) \cup \dots$$

$$V'(0) = \{(j, 0); 0 < j < a\}$$

$$V'(4k-3) = \{(a(k-1), 2k-2), (a(k-1), 2k-1)\}$$

$$V'(4k-2) = \{(j, 2k-1); a(k-1)+1 \leq j < a(k)-3\}$$

$$V'(4k-1) = \{(a(k)-2, 2k-1), (a(k)-2, 2k)\}$$

$$V'(4k) = \{(a(k)-1, 2k)\}$$

但し、 $a=0$  又は  $w(i)=3$  の時は  $V'(0)$  又は  $V'(4k-2)$  は空集合とし、 $w(i)=2$  の時はこの type の extension は定義しない。  $M' \in V'$  の実として、 $R'(M')_i = R_i(M'_i)$ ,  $R'(M')_s = M'_s \pmod{2b}$  と  $\exists$  3.

$$[\text{type-4}]: \quad V' = \{(0, 0)\} \cup \{(j, j-1), (j, j); j \geq 1\}$$

但し  $w(i) \geq 3$  の時はこの type の extension は定義しない。  $M' \in V'$  の実として、 $R'(M')$  を type-3 の時と同様に

定義する。

かようにして  $(V, R) | \{i\}$  の extension type-2, 3, 4 を定義したわけですが、それと  $(V, R)$  の amalgamation  $(V, R) \otimes (V', R')$  をそれぞれ type-2, 3, 4 extension with respect to  $(i, a, b)$ ,  $(i, a, b)$ ,  $(i, b)$  とする。

9. Lemma.  $(V, R)$  を nodes  $J$  をもつ finite state chart,  $(V^e, R^e) = (V, R) \otimes (V', R')$  を 7, 8 で定義した 4 の type の extension のうちの任意の 1 つとする。  $M^e, N^e$  を  $R^e(M^e) = R^e(N^e)$  かつ  $M^e|_J \sim N^e|_J$  なる  $V^e$  の点とすると、  $M^e \sim N^e$  である。

証明. 6. lemma 及び 6.6 of [6] を用いることにより証明できる。より厳格な証明を欲するなら、各 extension を change chart を用いて表現することもできるが、ここではふれないことにする。

10. Lemma (Hattori [10]).  $(V, R)$  を finite state chart,  $T(\alpha)$ ,  $T(\beta)$  と  $T(\beta) \xrightarrow{\sim} T(\alpha)$  なる similarity class とすると、ある node  $i \in J$  が存在して、任意の  $M \in T(\alpha)$ ,  $N \in T(\beta)$  について  $N_i > M_i$  となりかつ  $M_i$  は定数にある。



証明、 $Q(0)$  を  $Z(T(\alpha))$  の unspanned nodes とする。  
 $T(\beta) \not\sim T(\alpha)$  で  $T(\alpha)$  が  $v$ -similarity class なることより、  
 ある node  $i \in Q(0)$  が存在して、任意の  $M \in T(\alpha)$ ,  $N \in T(\beta)$  について、 $M_i < N_i$  となる。一方 1 により  $M_i$  は定数である。

11. 定理、 $(V, R)$  を nodes  $J$  をもった finite state chart、 $K = (T(\alpha), T(\beta))$  を  $T(\beta) \not\sim T(\alpha)$  なる knotty set  $K$  の元とすると、 $K$ -extension で nodes  $\{i, J\}$  をもったものが存在する。但し  $i$  は  $J$  のある指数である。

証明。10において存在を示された特別な node を  $i$  とすると、 $T(\alpha)$  は node  $i$  では定数であるからそれを  $(r-1)$  とする。もし  $V \setminus \{i\} = \{0, 1, \dots, R\}$  ならば  $(V^e, R^e)$  を type-1 extension with respect to  $(i, r)$  とし、一方もし  $w(i) \geq 2$  だったと  $a, b$  を  $r = b \cdot w(i) + a$   $0 \leq a < w(i)$  とし、 $(V^e, R^e)$  を type-2 extension with respect to  $(i, a, b)$  とすれば、9 lemma 及び、簡単な計算により  $K$ -extension であることがわかる。

12. Lemma (Hattori' [10]).  $J$  を空でない有限個の指数、集合、 $P(1), P(2), Z$  を  $P(1) \neq P(2) \pmod{2}$  なる

$W^J$  の実とする。  $W^J$  の部分集合  $S(1), S(2)$  を

$$S(1) = \{P(1) + rZ; r \in W\}, \quad S(2) = \{P(2) + rZ; r \in W\}$$

と定義すると、ある正整数  $k$  が存在して、 $S(1), S(2)$  をそれぞれ  $k$  個の disjoint union  $S(1) = \bigcup_{t=0}^{k-1} S(1, t), S(2) = \bigcup_{t=0}^{k-1} S(2, t)$  但し、 $S(1, t) = \{P(1) + tZ + r kZ; r \in W\}$

$$S(2, t) = \{P(2) + tZ + r kZ; r \in W\},$$

で表わすと、任意の  $(t, s) \in \{0, 1, \dots, k-1\} \times \{0, 1, \dots, k-1\}$  に対してある node  $i \in J$  が存在して、 $M_i \not\equiv N_i \pmod{kZ_i}$  が任意の  $M \in S(1, t), N \in S(2, s)$  について成り立つ。

13. 定理.  $(V, R)$  を nodes  $J$  をもった finite state chart、 $\kappa = (T(\alpha), T(\beta))$  を  $T(\alpha) \in T(\beta)$  i.e.,  $T(\alpha) \leq T(\beta)$  かつ  $T(\beta) \leq T(\alpha)$ , ちる knotty set  $K$  の元とすると、nodes  $\{i, j\}$  をもった  $\kappa$ -extension  $(V^e, R^e)$  が存在する。但し  $i$  は  $i \in J$  なる指数である。

証明. 7.2 of [6] により  $T(\alpha), T(\beta)$  は同一の cycle  $\{Z(1), \dots, Z(m)\}$  をもつ。各  $Z(q), q=1, \dots, m$ , の張る nodes を  $Q(q)$  とし  $Q(0)$  を  $J - \bigcup Q(q)$  とする。  $T(\alpha), T(\beta)$  は nodes  $Q(0)$  に関しては定バクトルでありかつ  $T(\alpha) \in T(\beta)$  であるから  $Q(0)$  では等しい。従って (3) of 1 によりある cycle  $Z \in \{Z(1), \dots, Z(m)\}$  が存在して、その張る

nodes を  $Q$  とすると、 $M|Q \not\equiv N|Q \pmod{Z|Q}$  が全ての  $M \in T(\alpha)$ ,  $N \in T(\beta)$  について成立する。1 により

$$T(\alpha)|Q = \{P^g(\alpha) + r(Z|Q); r \in W\}$$

$T(\beta)|Q = \{P^g(\beta) + r(Z|Q); r \in W\}$  とかける、但し  $P^g(\alpha)$ 、 $P^g(\beta)$  はそれぞれ  $T(\alpha)|Q$ ,  $T(\beta)|Q$  の最少元である。従って  $P^g(\alpha) \neq P^g(\beta) \pmod{Z|Q}$  である。簡単のため、 $T(\alpha)|Q$ ,  $T(\beta)|Q$ ,  $Z|Q$  の代わりに  $T^g(\alpha)$ ,  $T^g(\beta)$ ,  $Z^g$  とかく。

12 Lemma で存在を示された特別な数  $k$  とし、 $T^g(\alpha)$ ,  $T^g(\beta)$  をそれぞれ  $k$  個の disjoint union  $T^g(\alpha) = \bigcup_{t=0}^{k-1} T^g(\alpha, t)$ 、

$T^g(\beta) = \bigcup_{s=0}^{k-1} T^g(\beta, s)$  で表わす。各  $(t, s) \in \{0, 1, \dots, k-1\}^2$  について  $X(t, s)$  を  $X(t, s) = \{T(\alpha, t), T(\beta, s)\}$ 、但し  $T(\alpha, t) = \{M \in T(\alpha); M|Q \in T^g(\alpha, t)\}$ ,  $T(\beta, s) = \{M \in T(\beta); M|Q \in T^g(\beta, s)\}$ 、と定義する。

もし任意の  $X(t, s)$  に対して  $X(t, s)$ -extension  $(V^{(t, s)}, R^{(t, s)})$  が存在するならば、 $\bigotimes_{(t, s)} (V^{(t, s)}, R^{(t, s)})$  が  $X$ -extension になることは容易にわかる。従ってこれから  $X(t, s)$  について考える。

$(t, s)$  を一つとり、それに対して、12 で存在を示された特別な node を  $i$  とする。 $u, v$  をそれぞれ  $T(\alpha, t)|\{i\}$ ,  $T(\beta, s)|\{i\}$  の最少元とし、 $u \leq v$  と仮定して一般性を失わない。一方  $u \not\equiv v \pmod{kZ_i}$  であるから、ある数  $C$  が存在して、 $u + CkZ_i < v < (C+1)kZ_i$  となる。

以下  $\omega(i) = 2$  と  $\omega(i) \geq 3$  の 2 つの場合に分ける。

$[w(i)=2]$  :  $b \in \mathbb{R}Z_i = b \cdot w(i) = 2b$  とする。

$\mathbb{R}Z_i \supset \mathbb{Z}4$  であるから  $b \in \mathbb{Z}2$  である。  $(V^e, R^e)$  は type 4 extension with respect to  $(i, b)$  とする。

$[w(i) \geq 3]$  :  $a, b, q \in \mathbb{R}Z_i = b \cdot w(i) = a + q \cdot w(i)$ ,  $0 \leq a < w(i)$ ,  $b \in \mathbb{Z}2$  とする。  $(V^e, R^e)$  は type 3 extension with respect to  $(i, a, b)$  とする。

すなわち、いずれの場合にも、9 lemma 及びもう少し複雑な計算により  $(V^e, R^e)$  が  $K(t, s)$ -extension であることが分る。

以上により  $K$ -extension を構成する手順は与えられたが、それは一般に与えられた  $p$  に対して  $p$  個とはならない。従って、次の定義と lemma により、今までの結果を利用して  $p$  個  $K$ -extension を構成するわけですが、ここでもそれにはふれないことにする。

14. 定義.  $(V, R)$  は nodes  $J$  に対する finite state chart,  $(V^e, R^e)$ ,  $(\hat{V}, \hat{R})$  はそれぞれ nodes  $J^e, \hat{J}$  に対する  $(V, R)$  の extension であり、次の (1) (2) (3) (4) を満たす、 $V^e$  から  $\hat{V}$  への onto mapping が存在するとする。

$$(1) \quad M^e|_J = f(M^e)|_J$$

$$(2) \quad M^e \geq N^e \iff f(M^e) \geq f(N^e)$$

(3) もし  $M^e \sim N^e$  かつ  $L^e \in V_{M^e}^e$  とすると、

$$f(M^e + L^e) - f(M^e) = f(N^e + L^e) - f(N^e)$$

$$(4) \quad R^e(M^e) = R^e(N^e) \Leftrightarrow \hat{R}(f(M^e)) = \hat{R}(f(N^e))$$

この時  $f$  を  $(V, R)$  上の不変写像,  $(\hat{V}, \hat{R})$  と  $(\hat{V}, \hat{R})$  の  $(V, R)$  上の不変像とよぶ。

15. Lemma.  $(V, R)$  を nodes  $J$  上での finite state chart,  $T, S$  を  $V$  の disjoint な部分集合、 $(V^e, R^e)$  を  $(T, S)$  extension とする。  $(V^e, R^e)$  の  $(V, R)$  上の不変像を  $(\hat{V}, \hat{R})$  とすると、  $(\hat{V}, \hat{R})$  も  $(T, S)$ -extension である。

最後にここに得た結論を述べる。

16. 定理.  $(V, R)$  を finite state chart とすると、その digital extension を構成する手順がある。もし  $(V, R)$  が  $p$ -進、physical ならば、 $p$ -進、physical な digital extension を構成できる。